حسابان — سؤالات امتحانی هماهنگ کشوری- خرداد ماه ۱۳۸۷

۱- دامنه تابع $y=\frac{\sqrt{1-x}}{[x]}$ را تعیین کنید.

۲- تابع g با ضابطه $g(x)=\sqrt{x-1}$ مفروض است:

الف) دامنه تابع gog را بدون تشکیل ضابطه آن بیابید. ب) ضابطه تابع gog را بنویسید.

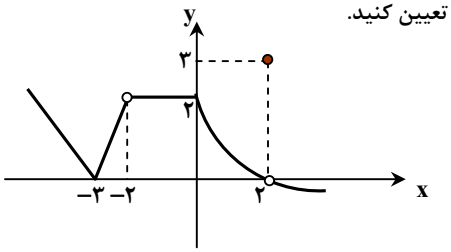
۳- در معادله درجه دوم $4x^2-16x+m=0$ یکی از ریشه ها دو واحد بیشتر از ریشه دیگر است. مقدار m و هر دو ریشه معادله را بیابید.

۴- f تابعی یک به یک است و f^{-1} معکوس f است. ضابطه تابع معکوس تابع $g(x)=1-2f(x+3)$ را بیابید.

۵- درستی رابطه مقابل را بررسی کنید.

$$\frac{4\sin\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)}{\sin 5\alpha+\sin\alpha}=\frac{1}{\sin 3\alpha}$$

۶- نمودار تابع f در شکل زیر داده شده است ، حاصل هر یک از حدود زیر را در صورت وجود تعیین کنید.



الف) $\lim\limits_{x\to -2} f(x)$

ب) $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$

ج) $\lim\limits_{x\to -1} f(x)$

۷- حدود زیر را در صورت وجود بیابید. ([ ] نماد جزء صحیح است)

الف) $\lim\limits_{x\to 3^+}\frac{x-3}{[x]+[-x]}$

ب) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{2x^3-x-1}{x^2-x}$

ج) $\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{\sin 2x}{\sqrt{1-\cos 2x}}$

د) $\lim\limits_{x\to -\infty}(\sqrt{x^2+2x}-\sqrt{x^2+1})$

۸- معادلات خطوط مجانب قائم و افقی تابع $y=\frac{1}{\sqrt{x}}+\frac{1}{x+1}$ را در صورت وجود بیابید.

۹- تابع f با ضابطه $f(x)=\frac{\sqrt[3]{x+8}-2}{x}$ مفروض است. $f(0)$ را چنان بیابید که تابع f در $x_0=0$ پیوسته باشد.

۱۰- مشتق بگیرید. (ساده کردن مشتق الزامی نیست)

الف) $y=\tan^3(x^2)+\cos(5x-\frac{\pi}{4})$

ب) $y=\frac{(2x+1)^5}{x\sqrt{x}}$

ج) $x^2+x^3y^4-y=2x-5$

۱۱- اگر $f'(x)=x^2$ باشد ، مشتق $y=f(\sin x)$ را حساب کنید.

۱۲- تابع $y=\frac{ax+۲}{x+(a-۱)}$ مفروض است. در صورتی که نقطه $O'(-۲,۳)$ مرکز تقارن تابع باشد ، شیب خط مماس بر منحنی تابع را در نقطه تلاقی آن با محور عرض ها بیابید.

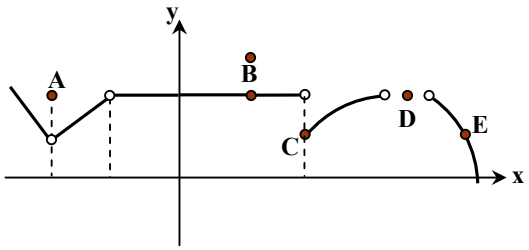
۱۳- مساحت یک کره به شعاع r از فرمول $S=۴\pi r^۲$ به دست می آید. اگر شعاع کره با آهنگ آنی ۳ سانتی متر در ثانیه کاهش یابد ، آهنگ آنی تغییر مساحت کره را در لحظه ای که شعاع کره ۵ سانتی متر است ، بیابید.

۱۴- تابع f با ضابطه $f(x)=\begin{cases}۸x & x\le ۲\\ ۲x^۲+۱ & x>۲\end{cases}$ مفروض است.

الف) $f'_+(۲)$ و $f'_-(۲)$ را بدست آورید.

ب) آیا تابع f در $x_۰=۲$ مشتق پذیر است؟ چرا؟

۱۵- شکل زیر نمودار تابع $y=f(x)$ است:



الف) کدام یک از نقاط مشخص شده در شکل ، نقطه بحرانی نیست؟

ب) کدام یک از نقاط مشخص شده ، ماکزیمم و می نیمم نسبی می باشد؟

۱۶- در تابع $y=ax^۳+bx^۲$ ، ضرایب a,b را چنان بیابید که نقطه $I(۱,۲)$ نقطه عطف تابع باشد.

۱۷- جدول تغییرات و نمودار تابع $y=ArcCos(\sqrt{x})$ را رسم کنید.

۱۸- ابتدا نمودار $y=x[x]$ را در بازه $(-۱,۲)$ رسم کنید. سپس مقدار $\int_{-۱}^{۲} y\,dx$ را بیابید.

پاسخ سؤالات امتحانی هماهنگ کشوری- خردادماه ۱۳۸۷

۱-

$$\left.\begin{array}{ll} 1-x\geq 0\Rightarrow 1\geq x & (1)\\ [x]\neq 0\Rightarrow x\in R-[0,1) & (2)\end{array}\right\}\Rightarrow (1)\cap(2)\Rightarrow D=(-\infty,0)\cup\{1\}$$

۲-

$$g(x)=\sqrt{x-1}$$

الف) $D_g: x-1\geq 0\Rightarrow x\geq 1\Rightarrow D_g=[1,+\infty)$

$$D_{gog}=\left\{x\in D_g \,\middle|\, g(x)\in D_g\right\}=\left\{x\in[1,+\infty)\,\middle|\, \underbrace{\sqrt{x-1}}_{x\geq 2}\geq 1\right\}=[2,+\infty)$$

ب) $gog(x)=g\big(g(x)\big)=\sqrt{\sqrt{x-1}-1}$

۳-

$$\begin{cases}\alpha=\beta+2\\ \alpha+\beta=4\\ \alpha\times\beta=\frac{m}{4}\end{cases}\Rightarrow \begin{array}{l}\alpha+\beta=-\frac{b}{a}=-\frac{-16}{4}=4\\ \alpha\times\beta=\frac{c}{a}=\frac{m}{4}\end{array}$$

$$\beta+2+\beta=4\Rightarrow 2\beta=2\Rightarrow\begin{cases}\beta=1\\ \alpha=3\end{cases}\Rightarrow 3\times 1=\frac{m}{4}\Rightarrow m=12$$

۴-

$$y=g(x)\Leftrightarrow x=g^{-1}(y)\qquad (1)$$

$$y=1-2f(x+3)\Rightarrow f(x+3)=\frac{1-y}{2}\Rightarrow x+3=f^{-1}\left(\frac{1-y}{2}\right)\Rightarrow x=f^{-1}\left(\frac{1-y}{2}\right)-3\qquad (2)$$

$$(1),(2)\Rightarrow g^{-1}(y)=f^{-1}\left(\frac{1-y}{2}\right)-3\Rightarrow g^{-1}(x)=f^{-1}\left(\frac{1-x}{2}\right)-3$$

۵-

$$\sin\alpha.\sin\beta=-\frac{1}{2}\left[\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)\right]$$

$$\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\frac{\beta+\alpha}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\frac{4\sin\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)\sin\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)}{\sin 5\alpha+\sin\alpha}=\frac{4\times\left(-\frac{1}{2}\right)\left(\cos\frac{\pi}{2}-\cos 2\alpha\right)}{2\sin 3\alpha\cos 2\alpha}=\frac{2\cos 2\alpha}{2\sin 3\alpha\cos 2\alpha}=\frac{1}{\sin 3\alpha}$$

۶-

الف) $\lim\limits_{x\to -2} f(x)=2$ ب) $\lim\limits_{x\to 2} f(x)=0$ ج) $\lim\limits_{x\to -1} f(x)=2$

۷-

الف) $\lim\limits_{x\to 3^+}\dfrac{x-3}{[x]+[-x]}=\lim\limits_{x\to 3^+}\dfrac{x-3}{-1}=0$

ب) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x^3-x-1}{x^2-x}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x-1)(2x^2+2x+1)}{x(x-1)}=5$

ج) $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{\sin 2x}{\sqrt{1-\cos 2x}}=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{\sin 2x}{\sqrt{2}|\sin x|}=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{2\sin x\cos x}{-\sqrt{2}\sin x}=-\sqrt{2}$ گویا شده $\qquad 1-\cos 2x=2\sin^2 x$

د) $\lim_{x\to-\infty}(\sqrt{x^2+2x}-\sqrt{x^2+1})=\infty-\infty$ مبهم $\Rightarrow$ گویا $\lim_{x\to-\infty}\frac{(x^2+2x)-(x^2+1)}{\sqrt{x^2+2x}+\sqrt{x^2+1}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{2x-1}{\underbrace{\sqrt{x^2}}_{-x}+\underbrace{\sqrt{x^2}}_{-x}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{2x}{-2x}=-1$

-۸

$y=\frac{1}{\sqrt{x}}+\frac{1}{x+1}$ $D:x>0$ (۱) , $D:x+1=0\Rightarrow x=-1\Rightarrow R-\{-1\}$ (۲) $\Rightarrow$ (۱)$\cap$(۲) $\Rightarrow D=(0,+\infty)$

$\lim_{x\to+\infty}y=0$ مجانب افقی $y=0$ $\lim_{x\to0^+}=+\infty$ مجانب قائم $x=0$

-۹

$f(0)=\lim_{x\to0}f(x)$ شرط پیوستگی

$a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$

$(x+8)-8=(\sqrt[3]{x+8}-2)(\sqrt[3]{(x+8)^2}+2\sqrt[3]{x+8}+4)$

$f(0)=\lim_{x\to0}\frac{\sqrt[3]{x+8}-2}{x}=\lim_{x\to0}\frac{(x+8)-8}{x(\sqrt[3]{(x+8)^2}+2\sqrt[3]{(x+8)}+4)}=\lim_{x\to0}\frac{x}{x(\sqrt[3]{(x+8)^2}+2\sqrt[3]{(x+8)}+4)}=\frac{1}{12}$

-۱۰

الف) $y'=3\times2x\times\tan^2(x^2)(1+\tan^2(x^2))+\left[-5\sin(5x-\frac{\pi}{4})\right]$

ب) $y'=\frac{5\times2(2x+1)^4\,x\sqrt{x}-(-\frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{x})(2x+1)^5}{(x\sqrt{x})^2}$

ج) $x^2+x^3y^4-y-2x+5=0$

$2x+(3x^2y^4+4y^3y'x^3)-y'-2=0\Rightarrow y'=\frac{-(2x+3x^2y^4-2)}{4x^3y^3-1}$

-۱۱

$y'=\cos x.f'(\sin x)=\cos x.\sin^2 x$

$y=f(u)\Rightarrow y'=u'f'(u),\ f'(u)=\sin^2 x$

-۱۲

طول نقطه تلاقی نمودار با محور عرض ها صفر است.

$\begin{cases}x\to\pm\infty\Rightarrow y=\frac{a}{1}\Rightarrow y=a\\ y\to\pm\infty\Rightarrow x=1-a\Rightarrow x+a-1=0\end{cases}\Rightarrow a=3\Rightarrow y=\frac{3x+2}{x+2}$

$y'=\frac{4}{(x+2)^2}\Rightarrow\begin{cases}x=0\Rightarrow y'=\frac{4}{(0+2)^2}\\ m=1\text{ شیب مماس}\end{cases}$

-۱۳

$r=5,S=4\pi r^2\Rightarrow\frac{ds}{dr}=8\pi r$

$\frac{dr}{dt}=-3\Rightarrow\frac{ds}{dt}=\frac{ds}{dr}\times\frac{dr}{dt}=8\pi\times5\times(-3)=-120\pi$

-۱۴

•

$$f'_+(2)=\lim_{x\to 2^+}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim_{x\to 2^+}\frac{2x^2+1-16}{x-2}=\frac{5-16}{0^+}=\frac{-11}{0^+}=-\infty$$

$$2)=\lim_{x\to 2^-}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim_{x\to 2^-}\frac{8x-16}{x-2}=\lim_{x\to 2^-}\frac{8(x-2)}{x-2}=8$$

$$f(2)=8\times 2=16$$

$$,\ f(2)\neq\lim_{x\to 2^+}f(x)\Rightarrow\lim_{x\to 2^+}f(x)=2(2)^2+1=9$$

تابع در $x_0=2$ پیوستگی راست ندارد ، بنابراین $f'_+(2)$ وجود ندارد.

ب) خیر ، چون مشتق چپ و راست مساوی نیست. یا چون f در $x=2$ پیوسته نیست.

-۱۵

نقطه E بحرانی نیست (الف

$A,B\rightarrow$ نقاط ماکزیمم نسبی (ب $B,C\rightarrow$ نقاط می نیمم نسبی

-۱۶

$(1,2)\rightarrow$ تابع

$$y=ax^3+bx^2\Rightarrow 2=a(1)^3+b(1)^2\Rightarrow a+b=2$$

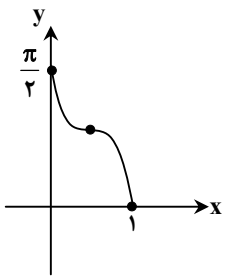
$$y'=3ax^2+2bx\Rightarrow y''=6ax+2b\Rightarrow\begin{cases}y''=0\ ,x=1\\6a(1)+2b=0\Rightarrow 3a+b=0\end{cases}$$

$$-\begin{cases}a+b=2\\3a+b=0\end{cases}\Rightarrow\begin{matrix}2a=-2\\a=-1,b=3\end{matrix}$$

-۱۷

$$-1\le\sqrt{x}\le 1\Rightarrow D=[0,1]$$

$$y'=\frac{-\frac{1}{2\sqrt{x}}}{\sqrt{1-(\sqrt{x})^2}}<0$$ همواره منفی است



نقاط بحرانی $\begin{cases}x=0\\x=1\end{cases}\Rightarrow\begin{matrix}y=\frac{\pi}{2}\Rightarrow y'=-\infty\\y=0\end{matrix}$ در این نقاط ، مماس موازی محور عرض هاست

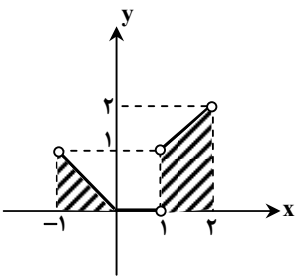
کمکی $\begin{vmatrix}x=\frac{1}{4}\\y=\frac{\pi}{3}\end{vmatrix}$ کمکی $\begin{cases}x=\frac{1}{2}\\x=\frac{\pi}{4}\end{cases}$

x	0	1/4	1/2	1
y′		—		
y	π/2 ↘	π/3 ↘	π/4 ↘	0

-۱۸

$$\left.\begin{matrix}-1<x<0\rightarrow y=-x\\0\le x<1\rightarrow y=0\\1\le x<2\rightarrow y=x\end{matrix}\right\}$$

$$\int_{-1}^{2}y\,dx=\frac{1\times 1}{2}+\frac{1\times(1+2)}{2}=2$$



x	-1	0	1	2
y	1	0	1	2